**Théorèmes : Séries de fonctions**

**Types de convergences**

Soit une suite de fonctions de vers .

Définition : (Série de fonctions)

On appelle série de fonctions de terme général la suite de fonctions où

On la note et pour , est appelée somme partielle d’ordre de la série de fonctions.

**Convergence simple et absolue**

Soit une série de fonctions de vers .

Définition : (Convergence simple)

On dit que CVS sur s’il existe une fonction telle que CVS vers sur .

Cette fonction est appelée la somme de la série sur et notée :

Théorème :

On a équivalence entre :

1. CVS sur
2. CV

Dans ce cas,

Définition : (Domaine de convergence simple)

On appelle domaine de CVS de la plus grande partie de sur laquelle CVS.

Propriété :

Si la série de fonction CVS sur alors la suite de fonctions CVS sur vers la fonction nulle.

Définition : (Reste d’ordre )

Si CVS sur , on peut définir pour , le reste d’ordre , la série de fonctions :

Propriété : Si CVS sur alors (sur A) vérifie :

Et CVS sur A vers la fonction nulle.

Définition : (Convergence absolue simple)

On dit que CVAS sur si CVS sur ssi CV.

Théorème :

Si CVAS sur , alors CVS sur .

**Convergence uniforme**

Définition : (Convergence uniforme)

On dit que la série de fonctions CVU sur si la suite de fonctions CVU sur .

Propriété : Si CVU sur alors CVS sur .

Propriété : Si CVU sur , alors CVU sur vers la fonction nulle.

Propriété : Soit . On a équivalence entre :

1. CVU sur
2. CVS sur et CVU sur vers la fonction nulle.

**Convergence normale**

Définition : Soit une série de fonctions de vers .

On dit que CVN sur si :

1. , la fonction est bornée sur .
2. converge

Théorème : ⍟

Si CVN sur , alors :

1. CVAS sur .
2. CVU sur .

**Continuité et limites**

**Continuité**

Théorème : Soit une série de fonctions de vers et . Supposons que :

1. , la fonction est continue sur
2. CVU sur

Corollaire : Soit un intervalle inclus dans . Si :

1. est continue sur
2. CVU sut tout segment inclus dans

Théorème : (d’interversion ou de la double limite)

Soit une série de fonctions de vers et

Soit (ou (resp. ) si A est non majoré (resp. non minoré)

On suppose que :

1. admet une limite finie en notée
2. CVU sur

Alors CV, admet une limite finie en et , ie :

Remarque : à partir de maintenant, les fonctions sont uniquement à valeurs réelles

**Séries de fonctions & intégrales**

est un intervalle de et une série de fonctions de vers

**Intégration sur un segment**

Théorème : (d’interversion )

Soient , et une série de fonctions de vers

On suppose que :

1. est continue sur
2. CVU sur

Alors est continue sur , et la série numérique converge vers

**Intégration sur un intervalle quelconque**

Théorème d’intégration terme à terme :

Soit un intervalle de et une série de fonctions de vers . On suppose que :

1. est c.p.m sur et intégrable sur .
2. CVS sur est est c.p.m sur
3. La série numérique converge

Alors est intégrable sur et :

**Séries de fonctions et dérivation**

**Fonctions de classe**

Théorème : Soit un intervalle de et une suite de fonctions de vers . On suppose que :

1. est de classe sur
2. CVS en un point
3. CVU sur tout segment inclus dans

Alors CVU sur tout segment inclus dans , sa fonction somme est de classe sur , et