**Théorèmes : Séries de fonctions**

**Types de convergences**

Soit une suite de fonctions de vers .

Définition : (Série de fonctions)

On appelle série de fonctions de terme général la suite de fonctions où

On la note et pour , est appelée somme partielle d’ordre de la série de fonctions.

**Convergence simple et absolue**

Soit une série de fonctions de vers .

Définition : (Convergence simple)

On dit que CVS sur s’il existe une fonction telle que CVS vers sur .

Cette fonction est appelée la somme de la série sur et notée :

Théorème :

On a équivalence entre :

1. CVS sur
2. CV

Dans ce cas,

Définition : (Domaine de convergence simple)

On appelle domaine de CVS de la plus grande partie de sur laquelle CVS.

Propriété :

Si la série de fonction CVS sur alors la suite de fonctions CVS sur vers la fonction nulle.

Définition : (Reste d’ordre )

Si CVS sur , on peut définir pour , le reste d’ordre , la série de fonctions :

Propriété : Si CVS sur alors (sur A) vérifie :

Et CVS sur A vers la fonction nulle.

Définition : (Convergence absolue simple)

On dit que CVAS sur si CVS sur ssi CV.

Théorème :

Si CVAS sur , alors CVS sur .

**Convergence uniforme**

Définition : (Convergence uniforme)

On dit que la série de fonctions CVU sur si la suite de fonctions CVU sur .

Propriété : Si CVU sur alors CVS sur .

Propriété : Si CVU sur , alors CVU sur vers la fonction nulle.

Propriété : Soit . On a équivalence entre :

1. CVU sur
2. CVS sur et CVU sur vers la fonction nulle.

**Convergence normale**

Définition : Soit une série de fonctions de vers .

On dit que CVN sur si :

1. , la fonction est bornée sur .
2. converge

Théorème : ⍟

Si CVN sur , alors :

1. CVAS sur .
2. CVU sur .

**Continuité et limites**

**Continuité**

Théorème : Soit une série de fonctions de vers et . Supposons que :

1. , la fonction est continue sur
2. CVU sur

Corollaire : Soit un intervalle inclus dans . Si :

1. est continue sur
2. CVU sut tout segment inclus dans

Théorème : (d’interversion ou de la double limite)

Soit une série de fonctions de vers et

Soit (ou (resp. ) si A est non majoré (resp. non minoré)

On suppose que :

1. admet une limite finie en notée
2. CVU sur

Alors CV, admet une limite finie en et , ie :

Remarque : à partir de maintenant, les fonctions sont uniquement à valeurs réelles

**Séries de fonctions & intégrales**

est un intervalle de et une série de fonctions de vers

**Intégration sur un segment**

Théorème : (d’interversion )

Soient , et une série de fonctions de vers

On suppose que :

1. est continue sur
2. CVU sur

Alors est continue sur , et la série numérique converge vers

**Intégration sur un intervalle quelconque**

Théorème d’intégration terme à terme :

Soit un intervalle de et une série de fonctions de vers . On suppose que :

1. est c.p.m sur et intégrable sur .
2. CVS sur et est c.p.m sur
3. La série numérique converge

Alors est intégrable sur et :

**Séries de fonctions et dérivation**

**Fonctions de classe**

Théorème : Soit un intervalle de et une suite de fonctions de vers . On suppose que :

1. est de classe sur
2. CVS en un point
3. CVU sur tout segment inclus dans

Alors CVU sur tout segment inclus dans , sa fonction somme est de classe sur , et

Exemple : Existence et calcul de pour

Posons

* est de classe sur et
* Soit (fixé)

La série numérique est une série géométrique de raison avec puisque donc CV.

Ainsi CVS sur

* Soit

donc est décroissante sur et , donc la fonction est bornée sur et qui ne tend pas vers 0 quand tend vers .

Donc DVG. Ainsi ne converge pas normalement sur .  
Soit

La fonction est bornée sur le segment et

Donc par comparaison de SATP, CV, donc CVN sur donc CVU sur

Donc par le théorème de dérivation, la fonction somme est de classe sur , et pour tout ,

Donc , or par sommation géométrique,

D’où

**Dérivées d’ordres supérieurs**

Théorème : Soient un intervalle de et une série de fonctions de vers

On suppose que :

1. , la fonction est de classe sur .
2. , CVS sur
3. CVU sur tout segment inclus dans I

Alors la fonction somme est de classe sur et ,

Démonstration : Notons

1. est de classe sur .
2. , CVS sur par linéarité de la dérivation.
3. CVU sur tout segment inclus dans

Donc on peut appliquer le théorème de dérivation à la suite de fonction

Remarque : la démo donne aussi que , CVU sur tout segment inclus dans